

Дано: $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$
 $l = 15 \text{ см}$
 $d = 10 \text{ мм}$
 $\tau_T = 150 \text{ МПа}$

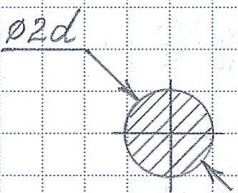
Определить:

1) $M_{кр}, \tau_{max}, \varphi;$

- 2) Участок стержня, на котором появятся первые пластические деформации;
- 3) Значение параметра нагрузки M , соответствующего появлению первых пластических деформаций: M_T .

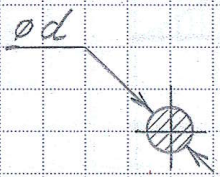
Решение

Геометрические характеристики всех поперечных сечений выразим через какую-то одну величину:



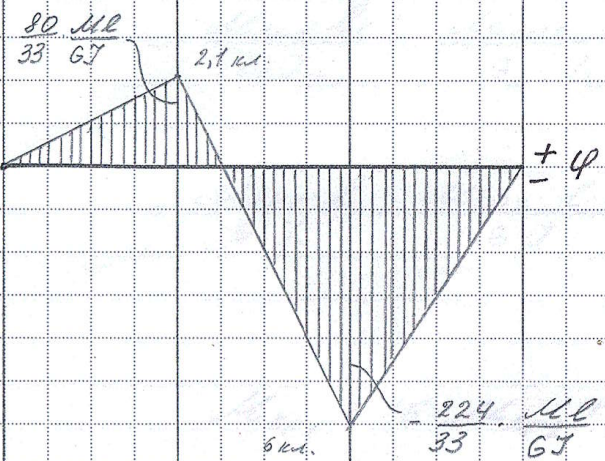
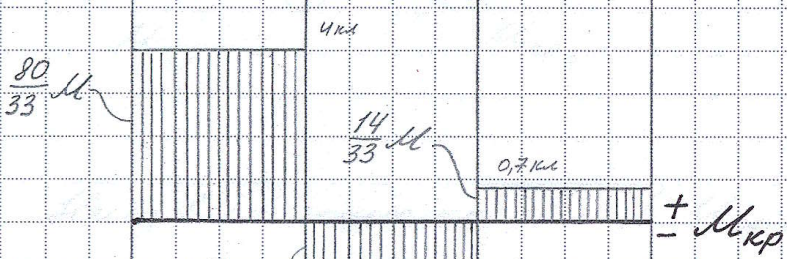
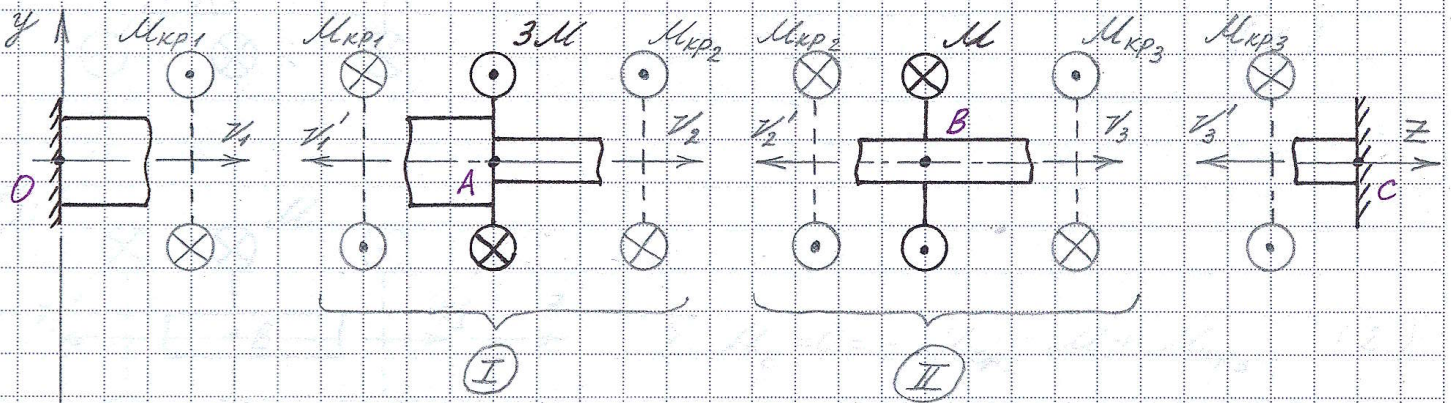
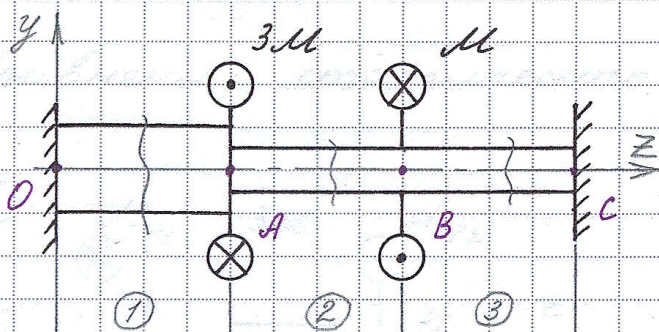
$$W_k = W_p = \frac{\pi (2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2} \triangleq W$$

$$J_k = J_p = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2} \triangleq J$$

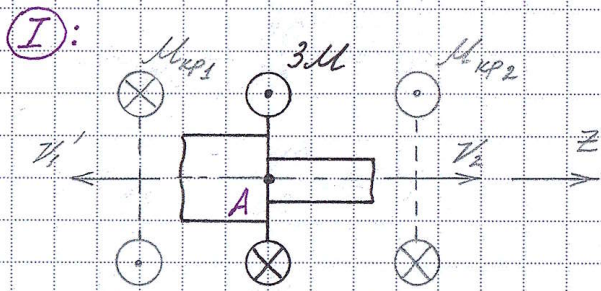


$$W_k = W_p = \frac{\pi d^3}{16} \triangleq \frac{W}{8}$$

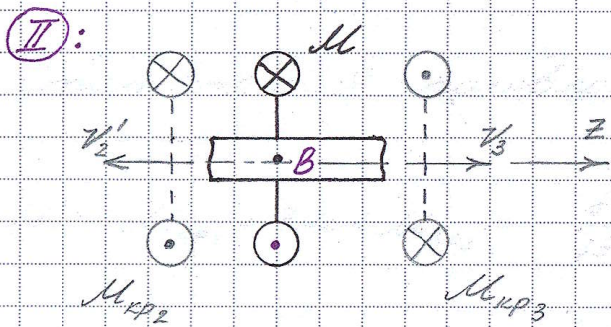
$$J_k = J_p = \frac{\pi d^4}{32} \triangleq \frac{J}{16}$$



Уравнения статического равновесия:



$$\sum M_z = 0 = -M_{кр1} + 3M + M_{кр2} \quad (1)$$



$$\sum M_z = 0 = -M_{кр2} - M + M_{кр3} \quad (2)$$

Неизвестных - три ($M_{кр1}$, $M_{кр2}$, $M_{кр3}$), уравнений статике - два. Степень статической неопределенности:

$$n = 3 - 2 = 1$$

Уравнение совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \sum \Delta \varphi_i &= 0 = \Delta \varphi_{AO} + \Delta \varphi_{BA} + \Delta \varphi_{CB} = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 + \Delta \varphi_3 = \\ &= \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G_1 J_{к1}} + \frac{M_{кр2} \cdot l_2}{G_2 J_{к2}} + \frac{M_{кр3} \cdot l_3}{G_3 J_{к3}} = \\ &= \frac{M_{кр1} \cdot l}{G J} + \frac{M_{кр2} \cdot l \cdot 16}{G J} + \frac{M_{кр3} \cdot l \cdot 16}{G J} = \frac{l}{G J} [M_{кр1} + 16 M_{кр2} + 16 M_{кр3}] \end{aligned}$$

$$M_{кр1} + 16 M_{кр2} + 16 M_{кр3} = 0 \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)-(3), получим:

$$M_{кр1} = \frac{80}{33} M ;$$

$$M_{кр2} = -\frac{19}{33} M ;$$

$$M_{кр3} = \frac{14}{33} M .$$

Статическая проверка:

$$(1): -M_{кр1} + 3M + M_{кр2} = -\frac{80}{33} M + \frac{99}{33} M - \frac{19}{33} M = 0 \quad \checkmark$$

$$(2): -M_{кр2} - M + M_{кр3} = \frac{19}{33} M - \frac{33}{33} M + \frac{14}{33} M = 0 \quad \checkmark$$

$$(3): M_{кр1} + 16 \cdot M_{кр2} + 16 M_{кр3} =$$

$$= \frac{80}{33} M - \frac{304}{33} M + \frac{224}{33} M = 0 \quad \checkmark$$

Максимальные напряжения в участках:

$$\tau_{max1} = \frac{M_{кр1}}{W_{к1}} = \frac{80}{33} \frac{M}{W} ;$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_{кр2}}{W_{к2}} = -\frac{19}{33} \frac{M \cdot 8}{W} = -\frac{152}{33} \frac{M}{W} ;$$

$$\tau_{max3} = \frac{M_{кр3}}{W_{к3}} = \frac{14}{33} \frac{M \cdot 8}{W} = \frac{112}{33} \frac{M}{W} .$$

Углы поворота поперечных сечений в точках конструкции:

$$\varphi_0 = 0 ;$$

$$\varphi_A = \Delta \varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{к1}} = \frac{80}{33} \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot J} ;$$

$$\begin{aligned} \varphi_B = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 &= \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{к1}} + \frac{M_{кр2} \cdot l_2}{G_2 \cdot J_{к2}} = \frac{80}{33} \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot J} - \frac{19}{33} \cdot \frac{M \cdot l \cdot 16}{G \cdot J} = \\ &= \frac{M \cdot l}{33 G \cdot J} [80 - 304] = - \frac{224}{33} \cdot \frac{M \cdot l}{G \cdot J} ; \end{aligned}$$

$$\varphi_C = 0 .$$

Между точками угол поворота сечений φ меняется линейно (т.к. распределённой нагрузки нет).

Делемие касательных напряжений τ на положительные и отрицательные весьма условно: их разрушительное действие от знака не зависит. Первые ^(сдвиговые) пластические деформации появятся на том участке, где касательные напряжения наибольшие по модулю:

$$\tau_{\max} = \max(|\tau_{\max 1}|, |\tau_{\max 2}|, |\tau_{\max 3}|) = \frac{152}{33} \cdot \frac{M}{W} .$$

Появятся они при действии на стержень внешней нагрузки с параметром M_T :

$$\tau_{\max} = \tau_T = \frac{152}{33} \cdot \frac{M_T}{W}$$

⇓

$$M_T = \frac{33 \cdot W \cdot \tau_T}{152} = \frac{33}{304} \cdot \frac{\pi d^3 \tau_T}{1} = \frac{33 \cdot \pi \cdot 0,010^3 \cdot 150 \cdot 10^6}{304} =$$

$$= 51,15 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Наибольший по модулю угол поворота при этом:

$$\varphi_{\max} = \varphi_B = \frac{224}{33} \cdot \frac{M_T \cdot l}{G \cdot J} = \frac{448}{33} \cdot \frac{M_T \cdot l}{G \pi d^4} = \frac{448 \cdot 51,15 \cdot 0,15}{33 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,010^4} =$$

$$= 0,04144 \text{ рад.}$$